

# ПРИМЕНЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В УПРАВЛЕНИИ РОБОТАМИ-МАНИПУЛЯТОРАМИ

**Аннамухаммет Акмухаммедович Багшыев**, к.ф.-м.н., ст. преподаватель  
**Гульширин Тойчиевна Амангельдыева**, ст. преподаватель  
**Джамал Довлетмурадовна Артыкова**, преподаватель  
Институт телекоммуникаций и информатики Туркменистана, Ашхабад,  
Туркменистан

**Аннотация.** Современные роботы-манипуляторы играют ключевую роль в автоматизации производственных процессов, особенно в условиях высокой точности и повторяемости операций. Эффективное управление такими устройствами невозможно без применения высшей математики, включая линейную алгебру, дифференциальное и вариационное исчисление, теорию матриц и методы оптимизации. В статье рассматриваются основные математические методы, используемые в моделировании и управлении движением манипуляторов, включая прямую и обратную кинематику, динамику, а также алгоритмы планирования траектории. Отдельное внимание уделяется применению численных методов и символьных вычислений в современных вычислительных средах.

**Ключевые слова:** робот-манипулятор, высшая математика, кинематика, динамика, управление, линейная алгебра, оптимизация.

**Application of Higher Mathematics in Control of Robot Manipulators**  
Institute of Telecommunications and Informatics of Turkmenistan, Ashgabat,  
Turkmenistan

**Abstract:** Modern robotic manipulators play a crucial role in the automation of production processes, especially where high precision and repeatability are required. Efficient control of such systems is impossible without the application of advanced mathematics, including linear algebra, differential and variational calculus, matrix theory, and optimization methods. This article discusses the key mathematical methods used in modeling and controlling the motion of manipulators, including direct and inverse kinematics, dynamics, and trajectory planning algorithms. Particular attention is paid to the application of numerical methods and symbolic computation in modern software environments.

**Keywords:** robotic manipulator, advanced mathematics, kinematics, dynamics, control, linear algebra, optimization.

Роботы-манипуляторы широко применяются в промышленности, медицине, аэрокосмической отрасли и других сферах. Их функциональность определяется точным математическим описанием и контролем положения и движения. Применение высшей математики позволяет решать задачи, связанные с построением траекторий, анализом устойчивости и реализацией адаптивного управления.

Прямая кинематика требует применения матричных преобразований и координатных преобразований, что требует хорошего владения линейной алгеброй [1]. Обратная кинематика, в свою очередь, требует решения нелинейных систем уравнений, часто с использованием итерационных численных методов.

Для моделирования движения звеньев манипуляторов применяются уравнения Лагранжа второго рода, основанные на вариационном исчислении [2]. Это позволяет учитывать инерционные свойства системы, силы тяжести и внешние воздействия при построении модели.

Методы оптимизации, включая градиентные алгоритмы и линейное программирование, используются для расчёта энергосберегающих или быстродействующих траекторий [3]. Также активно используются методы оптимального управления, основанные на решении уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана [4].

Многие задачи кинематики и динамики не имеют аналитических решений, поэтому активно применяются численные методы (метод Рунге—Кутты, итерационные схемы) и вычислительные пакеты — MATLAB, Maple, Python (SymPy) [5].

Математические модели и методы позволяют проектировать и управлять сложными многоступенчатыми манипуляторами, обеспечивая точность в реальном времени. Их применение эффективно в роботизированных хирургических установках, на сборочных линиях и в дистанционно управляемых устройствах [6].

Применение высшей математики — неотъемлемый элемент в развитии робототехники. Без математического анализа невозможно обеспечить ни стабильность работы манипуляторов, ни оптимальность их действий в сложной динамической среде.

Рассмотрим типичный пример: манипулятор с двумя вращательными звеньями (двухзвенный планарный манипулятор). Его положение можно задать с помощью угловых координат  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Прямая кинематика определяется уравнениями:

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

где —  $l_1, l_2$  длины звеньев. Эти уравнения задают позицию захвата в декартовой системе координат. Для решения обратной задачи (обратная кинематика) применяются методы решения трансцендентных уравнений.

Векторное и матричное представление положения и скорости является стандартом в математике роботов. Матрица Якоби  $J$  используется для преобразования между скоростями в пространстве суставов и в декартовом пространстве.

Матрица Якоби также используется для анализа особенностей, таких как сингулярности, при которых робот теряет степень свободы.

Наиболее распространённые методы управления:

- ПИД-регулирование (пропорционально-интегрально-дифференциальный контроль) — применяется при простых задачах позиционирования.
- Управление с обратной связью по состоянию — позволяет учитывать внутренние параметры модели и использовать оптимизацию.
- Методы адаптивного управления — учитывают изменяющиеся параметры, например, в медицине при индивидуальных нагрузках.
- Алгоритмы машинного обучения и нейросети — становятся актуальными для гибридных интеллектуальных систем [7].

Пример на Python (библиотека SymPy):

```
from sympy import symbols, cos, sin, simplify

θ1, θ2, l1, l2 = symbols('θ1 θ2 l1 l2')
x = l1 * cos(θ1) + l2 * cos(θ1 + θ2)
y = l1 * sin(θ1) + l2 * sin(θ1 + θ2)

print("Положение по X:", simplify(x))
print("Положение по Y:", simplify(y))
```

Этот код позволяет символично определить уравнения прямой кинематики, что важно при автоматическом генераторе управляющего кода для промышленных контроллеров.

Сочетание высшей математики с искусственным интеллектом и квантовыми вычислениями открывает новые горизонты в управлении роботами. Будущие системы смогут использовать предсказательные модели и эвристические алгоритмы, базирующиеся на вероятностных и дифференциальных уравнениях высокого порядка.

Высшая математика обеспечивает основу как для теоретического анализа, так и для практической реализации систем управления роботами-манипуляторами. Будущие успехи в робототехнике напрямую связаны с развитием математического аппарата и вычислительных методов.

Современные системы управления всё чаще интегрируют элементы искусственного интеллекта (ИИ), такие как нейронные сети, генетические алгоритмы и методы машинного обучения. Эти технологии позволяют роботу адаптироваться к изменяющимся условиям среды, учитывать нестабильность сенсорных данных и оптимизировать действия в реальном времени.

Например, нейросетевые контроллеры обучаются на большом объёме данных, включая показания датчиков, координаты движений и характеристики окружающей среды. В отличие от классических методов, такие подходы не требуют точной априорной модели объекта, что делает их особенно эффективными в условиях неопределённости.

Развитие коллаборативной робототехники (сobotы) ставит перед математикой новые задачи — прогнозирование действий человека, динамическое перераспределение задач между агентами и обеспечение

безопасности взаимодействия. Это требует разработки адаптивных моделей и вероятностных предсказательных алгоритмов.

Здесь активно применяются элементы теории вероятностей, логика нечетких множеств, байесовские сети и марковские процессы принятия решений. Высшая математика становится ключевым инструментом для построения логики «дружелюбного» и контекстно-осведомлённого поведения машин.

Манипуляторы, оснащённые компьютерным зрением, анализируют визуальные данные для навигации и манипуляции объектами. Обработка изображений, распознавание объектов и построение 3D-моделей также основаны на математических методах: линейной алгебре, теории графов, топологии и статистике.

Применяются алгоритмы фильтрации, кластеризации, восстановления глубины сцены и оптимизации движения относительно визуально обнаруженных целей. Всё это требует высокоуровневого взаимодействия математики и вычислительной инженерии.

Одной из новых тенденций является внедрение квантовых алгоритмов в области оптимизации и обработки информации. Квантовые вычисления потенциально позволяют решать задачи управления роботами гораздо быстрее, чем классические методы.

Исследуются подходы, в которых квантовые методы используются для быстрого поиска решений в пространстве конфигураций манипулятора или в оптимизации маршрутов движения в сложных средах. В будущем это может радикально изменить методы планирования и адаптации.

Применение высшей математики в управлении роботами-манипуляторами выходит далеко за пределы классических инженерных подходов. Современные математические методы позволяют не только описывать движение, но и формировать интеллектуальное поведение машин, устойчивость в непредсказуемой среде и эффективное взаимодействие с человеком.

Развитие робототехники напрямую зависит от качества математических моделей и способности инженерных систем использовать сложные вычисления. Таким образом, междисциплинарное сотрудничество между математикой, информатикой и прикладной механикой остаётся ключевым фактором прогресса.

### Литература

1. Крейг Дж. Введение в робототехнику. Механика и управление. — М.: Физматлит, 2021.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 2020.
3. Гергель В.П. Численные методы. — М.: Бином, 2021.
4. Сирацкий В.Н. Оптимальное управление. — М.: Наука, 2019.
5. Chapra S.C. Applied Numerical Methods with MATLAB. — McGraw-Hill, 2020.
6. Siciliano B., Khatib O. Springer Handbook of Robotics. — Springer, 2016.

7. Yoshikawa T. Foundations of Robotics: Analysis and Control. — MIT Press, 2022.